CAPÍTULO 7

LA DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

7.1 FUNCIONES TRASCENDENTES

Las funciones trascendentes se caracterizan por tener lo que se llama *argumento*. Un argumento es el número o letras que lo simbolizan que hacen que una función adquiera un valor, es decir, que se convierta en un número. Sin él, la función es vacía, o sea, no tiene valor.

Por ejemplo, la función *sen* (seno) es vacía, no tiene ningún valor porque le falta el argumento, le falta ese número que la transforme en una cantidad concreta. Si a la función anterior se le agrega un número cualquiera, por ejemplo el 26 para tener $sen\,26$ entonces esto ya adquiere un valor, el cual es $sen\,26 = 0.4383711$. A este número 26 que hizo que *sen* adquiriera un valor se le llama *argumento*.

Otro ejemplo: la función *log* (logaritmo) es vacía, no tiene asociado ningún valor, pero si se le agrega 107 para tener $log\,107$ entonces así ya adquiere el valor $log\,107 = 2.029383$. En este caso el 107 es el *argumento* de la función logaritmo.

De la misma forma, *arc tan* (arco tangente o tangente inversa) es vacía, no tiene asociado ningún valor, pero si se le agrega el número 1.23 para tener $arc\ tan\ 1.23$ ya adquiere el valor $arc\ tan\,1.23 = 50.8886$. En este caso el número 1.23 es el *argumento* de la función *arc tan*.

Las principales funciones trascendentes son:

a) *trigonométricas*;
b) *trigonométricas inversas* y
c) *logarítmicas y exponenciales*.

No son todas, pero las que se van a estudiar en este curso serán ésas. Dos características interesantes en todas las fórmulas de derivación de las funciones trascendentes son que el argumento está representado siempre por la letra u y la segunda es que todas las fórmulas terminan multiplicando por la derivada del argumento, o sea por $\frac{d}{dx}u$.

7.2 FÓRMULAS PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las fórmulas de derivación de las seis funciones trigonométricas son:

(9) $$\frac{d}{dx} sen\, u = cos\, u \frac{d}{dx}u$$

(10) $$\frac{d}{dx} cos\, u = -\, sen\, u \frac{d}{dx}u$$

(11) $$\frac{d}{dx} tan\, u = sec^2 u \frac{d}{dx}u$$

(12) $$\frac{d}{dx} cot\, u = -\, csc^2 u \frac{d}{dx}u$$

(13) $$\frac{d}{dx} sec\, u = tan\, u\, sec\, u \frac{d}{dx}u$$

(14) $$\frac{d}{dx} csc\, u = -\, cot\, u\, csc\, u \frac{d}{dx}u$$

Debe notarse que la derivada de una función trigonométrica es otra, u otras, función trigonométrica con el mismo argumento. Esto es muy importante: el argumento nunca cambia. Además todas las fórmulas terminan multiplicando por la derivada del argumento $\left(\frac{d}{dx}u\right)$

Ejemplo 1: Hallar la derivada de $y = sen\ 5x$

Solución: El argumento es $5x$, o sea que $u = 5x$. Aplicando la fórmula (9) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\cos 5x}_{\cos u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}5x}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 5\cos 5x}$$

Nótese que el argumento $5x$ no cambia de la función original al resultado de la derivada.

Ejemplo 2: Hallar la derivada de $y = \cos x^2$.

Solución: El argumento es x^2, o sea que $u = x^2$. Aplicando la fórmula (10) se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-\,sen\ x^2}_{-\,sen\,u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}x^2}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -2x\ sen\ x^2}$$

Ejemplo 3: Hallar la derivada de $y = tan\,(x^2 - 3x + 5)$

Solución: El argumento es $(x^2 - 3x + 5)$, o sea que $u = x^2 - 3x + 5$. Aplicando la fórmula (11) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{sec^2\left(x^2 - 3x + 5\right)}_{sec^2 u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(x^2 - 3x + 5\right)}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \left(2x - 3\right) sec^2\left(x^2 - 3x + 5\right)}$$

Ejemplo 4: Hallar la derivada de $y = cot\sqrt{7x}$

Solución: El argumento es $\sqrt{7x}$, o sea que $u = \sqrt{7x}$. Aplicando la fórmula (12):

$$\frac{dy}{dx} = -\,csc^2\sqrt{7x}\ \frac{d}{dx}\sqrt{7x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-\,csc^2\sqrt{7x}}_{-\,csc^2 u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(7x\right)^{1/2}}_{\frac{d}{dx}u}$$

la derivada pendiente es de la forma u^n, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2\sqrt{7x}\left[\underbrace{\frac{1}{2}}_{n}\underbrace{(7x)}_{u}^{\underbrace{-1/2}_{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}7x}_{\frac{d}{dx}u}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2\sqrt{7x}\left[\frac{7}{2\sqrt{7x}}\right]$$

finalmente ordenando conforme a las reglas de escritura matemática

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{7}{2\sqrt{7x}}\csc^2\sqrt{7x}}$$

Ejemplo 5: Hallar la derivada de $y = \sec\left(\frac{1}{x^4}\right)$

Solución: El argumento es $\frac{1}{x^4}$, o sea que $u = \frac{1}{x^4}$. Aplicando la fórmula (13):

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{1}{x^4}\right)\sec\left(\frac{1}{x^4}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{1}{x^4}\right)\sec\left(\frac{1}{x^4}\right)\frac{d}{dx}\left(x^{-4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{1}{x^4}\right)\sec\left(\frac{1}{x^4}\right)\left[-4x^{-5}\right]$$

y ordenando conforme a las reglas de escritura matemática

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^5}\tan\left(\frac{1}{x^4}\right)\sec\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

Ejemplo 6: Hallar la derivada de $y = csc\left(\dfrac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right)$

Solución: El argumento es $\dfrac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}$, o sea que $u = \dfrac{3}{\sqrt[4]{6x - 1}}$. Aplicando la fórmula (14):

$$\frac{dy}{dx} = -\,cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right) csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right) \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\,cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right) csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right) \frac{d}{dx}\left[3\left(6x^5 - 1\right)^{-1/4}\right]$$

La derivada pendiente es de la forma u^n, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\,cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right) csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right)\left[-\frac{3}{4}\left(6x^5 - 1\right)^{-5/4}\frac{d}{dx}\left(6x^5 - 1\right)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\,cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right) csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right)\left[\frac{-3\left(30x^4\right)}{4\left(6x^5 - 1\right)^{5/4}}\right]$$

ordenando conforme a las reglas de escritura matemática

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{90x^4}{4\left(6x^5 - 1\right)^{5/4}}\, cot\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right) csc\left(\frac{3}{\sqrt[4]{6x^5 - 1}}\right)}$$

Ejemplo 7: Hallar la derivada de $y = sen\left(4x^2 - 4x + 7\right)^5$

Solución: El argumento es $(4x^2 - 4x + 7)^5$, por lo que $u = (4x^2 - 4x + 7)^5$. Empleando la fórmula (9):

$$\frac{dy}{dx} = cos\left(4x^2 - 4x + 7\right)^5 \frac{d}{dx}\left(4x^2 - 4x + 7\right)^5$$

la derivada pendiente es de la forma u^n, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = cos\left(4x^2 - 4x + 7\right)\left[\underbrace{5}_{n}\underbrace{\left(4x^2 - 4x + 7\right)}_{u}^{\overbrace{4}^{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(4x^2 - 4x + 7\right)}_{\frac{d}{dx}u}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = cos\left(4x^2 - 4x + 7\right)^5\left[5\left(4x^2 - 4x + 7\right)^4(8x - 4)\right]$$

y ordenando conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 5\left(4x^2 - 4x + 7\right)^4(8x - 4)cos\left(4x^2 - 4x + 7\right)^5}$$

EJEMPLOS CON POTENCIAS

Ejemplo 8: Hallar la derivada de $y = cos^4 5x$

Solución: Como la función $y = cos^4 5x$ es lo mismo que $y = (cos\,5x)^4$, tiene la forma de u^n, en donde $u = cos\,5x$ y $n = 4$. Entonces aplicando la fórmula (6) correspondiente a u^n se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{4}_{n}\underbrace{(cos\,5x)}_{u}^{\overbrace{3}^{n-1}}\underbrace{\frac{d}{dx}cos\,5x}_{\frac{d}{dx}u}$$

la derivada pendiente es de la forma $cos\ u$:

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(cos\ 5x\right)^3 \left[\underbrace{-\ sen\ 5x}_{-\ sen\ u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}5x}_{\frac{d}{dx}u}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\ cos^3\ 5x\left[-\ sen\ 5x\left(5\right)\right]$$

y ordenando se llega a

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\ 20\, cos^3\ 5x\ sen\ 5x}$$

Ejemplo 9: Hallar la derivada de $y = 7x^3\ tan\left(5x^2 - 7\right)$

Solución: La función tiene la forma del producto uv, en donde $u = 7x^3$ y $v = tan\left(5x^2 - 7\right)$. Entonces aplicando la fórmula (7) del producto uv :

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{7x^3}_{u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}tan\left(5x^2 - 7\right)}_{\frac{d}{dx}v}\ +\ \underbrace{tan\left(5x^2 - 7\right)}_{v}\underbrace{\frac{d}{dx}7x^3}_{\frac{d}{dx}u}$$

la primera derivada pendiente es de la forma $tan\ u$, en donde $u = 5x^2 - 7$:

$$\frac{dy}{dx} = 7x^3\left[\underbrace{sec^2\left(5x^2 - 7\right)}_{sec^2\ u}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(5x^2 - 7\right)}_{\frac{d}{dx}u}\right]\ +\ tan\left(5x^2 - 7\right)\left[21x^2\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=7x^3\left\langle sec^2\left(5x^2-7\right)[10x]\right\rangle+tan\left(5x^2-7\right)\left[21x^2\right]$$

Nótese que los factores $\left[10x\right]$ y $\left[21x^2\right]$ se escribieron con un paréntesis de diferente forma al del argumento de la secante y tangente para evitar confusiones y dejar claro que no pertenecen al argumento. Entonces, ordenando conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=70x^4\,sec^2\left(5x^2-7\right)+21x^2\,tan\left(5x^2-7\right)}$$

Ejemplo 10: Derivar $y=\dfrac{sen^4 5x}{sec\,x^2}$

Solución: La función tiene la forma de un cociente, en donde $u = sen^4 5x$ y $v = sec\,x^2$, por lo que la fórmula que debe emplearse es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\overbrace{sec\,x^2}^{v}\;\overbrace{\frac{d}{dx}sen^4 5x}^{\frac{d}{dx}u}\;-\;\overbrace{sen^4 5x}^{u}\;\overbrace{\frac{d}{dx}sec\,x^2}^{\frac{d}{dx}v}}{\underbrace{\left(sec\,x^2\right)^2}_{v^2}}$$

La primera derivada indicada es $\dfrac{d}{dx}sen^4 5x$, la cual se deriva con la fórmula de la potencia u^n (ver ejemplo 8), ya que $sen^4 5x=(sen\ 5x)^4$; y por el hecho de cambiar de fórmula adquieren nuevas asignaciones las variables u y n, siendo ahora $u = sen\ 5x$ y $n=4$, mientras que la segunda derivada pendiente es $\dfrac{d}{dx}sec\,x^2$, en donde el argumento es x^2.

Realizando las derivadas indicadas:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{sec\,x^2\left[\overbrace{4}^{n}\,{\left(\overbrace{sen\,5x}^{u}\right)}^{\overbrace{3}^{n-1}}\overbrace{\frac{d}{dx}sen\,5x}^{\frac{d}{dx}u}\right]-sen^4 5x\left[\overbrace{tan\,x^2}^{tan\,v}\,\overbrace{sec\,x^2}^{sec\,v}\,\overbrace{\frac{d}{dx}x^2}^{\frac{d}{dx}v}\right]}{sec^2\,x^2}$$

como $\frac{d}{dx}sen\,u=cos\,u\frac{d}{dx}u$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{sec\,x^2\left(4\,sen^3 5x\,cos\,5x\,\frac{d}{dx}5x\right)-sen^4 5x\left(tan\,x^2\,sec\,x^2\,[2x]\right)}{sec^2\,x^2}$$

finalmente, multiplicando y ordenando conforme a las reglas de escritura se llega a

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{20\,sec\,x^2\;sen^3 5x\,cos\,5x-2x\,sen^4 5x\,tan\,x^2\;sec\,x^2}{sec^2\,x^2}}$$

Ejemplo 11: Derivar $y=tan\;sen\;4x$

Solución: En este caso debe distinguirse en primer lugar que el argumento de la función trigonométrica *tangente* es a su vez la función trigonométrica *seno*; y que el argumento de este *seno* es $4x$. Significa que la función a derivar tiene la forma de $tan\,u$, en donde $u=sen\,4x$. Utilizando entonces la fórmula de derivación de la tangente se obtiene que

$$\frac{dy}{dx}=\underbrace{sec^2\;sen\;4x}_{sec^2\,u}\;\underbrace{\frac{d}{dx}sen\;4x}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\frac{dy}{dx} = sec^2\, sen\, 4x \left[\underbrace{cos\, 4x}_{cos\, u}\ \underbrace{\frac{d}{dx} 4x}_{\frac{d}{dx} u} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\, sec^2\, sen\, 4x\, cos\, 4x$$

como $cos\, 4x$ no es argumento de la secante, para evitar confusiones debe escribirse dicho coseno por delante:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 4\, cos\, 4x\, sec^2\, sen\, 4x}$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com
LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com
LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

EJERCICIO 7.1

Hallar la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

1) $y = sen\, 8x$

2) $y = cos\left(2 - 6x\right)$

3) $y = tan\left(x^2 - x\right)$

4) $y = cot\left(x^2 + 6x\right)^4$

5) $y = sec\sqrt{3x^5}$

6) $y = csc\left(\dfrac{1}{x^7}\right)$

7) $y = sen\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

8) $y = cos\left(\dfrac{3}{2x^8}\right)$

9) $y = tan\sqrt[6]{\left(4x - 5\right)}$

10) $y = cot\left(\dfrac{5}{\sqrt{\left(3x - 5\right)^7}}\right)$

11) $y = sec\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$

12) $y = csc\left(x^3 - x^2 + x - 6\right)$

13) $y = sen^4 2x$

14) $y = cos^3 6x$

15) $y = tan^5 x^7$

16) $y = \sqrt{sec\, 7x}$

17) $y = \sqrt{csc\left(x^2 - 5\right)}$

18) $y = \sqrt[4]{sen\left(x^2 - x\right)}$

19) $y = \dfrac{1}{\sqrt{cos\, 6x^4}}$

20) $y = \sqrt[9]{cot\left(8 - 3x\right)}$